REPUBLIQUE TUNISIENNE
Ministère de l'Enseignement Supérieur
de la Recherche Scientifique et de la Technologie

Concours Nationaux d'Entrée aux
Cycles de Formations d'Ingénieurs
Session : Juin 2003

Concours en Mathématiques Physique
Epreuve de Mathématiques II

Durée : 3 heures	Date : 11 Juin 2003	Heure : 8 H	Nb pages : 4
Barème :	Exercice : 6 pts	Problème : 14 pts	

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels, et pour tout entier naturel N, $\mathbb{R}_N[X]$ le sous espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à N.
On désigne par α un réel tel que $\alpha > -1$.

1) Montrer que pour tout couple de polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, la fonction qui :

$$x \mapsto P(x)Q(x)(1-x^2)^\alpha$$

est intégrable sur $]-1,1[$. On notera

$$(P,Q)_\alpha = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1-x^2)^\alpha dx$$

2) Montrer que l'application

$$(\,,\,)_\alpha : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(P,Q) \mapsto (P,Q)_\alpha = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1-x^2)^\alpha dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, on a :

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}((1-x^2)^{\alpha+n}) = (1-x^2)^\alpha J_n^\alpha(x)$$

où J_n^α est un polynôme de degré n.

4) Montrer que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, on a : $(J_n^\alpha, J_m^\alpha)_\alpha = 0$

5) a) calculer $J_n^\alpha(1)$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n^\alpha(-x) = (-1)^n J_n^\alpha(x)$.
c) En déduire, suivant la parité de n, la valeur de $J_n^\alpha(-1)$.

6) Soit l'application $\mathcal{A}_\alpha$ définie par :

$$\mathcal{A}_\alpha : \mathbb{R}_N[X] \longrightarrow \mathbb{R}_N[X]$$

$$P \mapsto \mathcal{A}_\alpha(P)$$

où $\mathcal{A}_\alpha(P)$ est un polynôme tel que, $\forall x \in]-1,1[$,

$$\mathcal{A}_\alpha(P)(x) = -(1-x^2)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial x}((1-x^2)^{\alpha+1}\frac{\partial P}{\partial x})$$

a) Montrer que $\mathcal{A}_\alpha$ définit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_N[X]$.
b) Montrer que, pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_N[X]$, on a : $(\mathcal{A}_\alpha(P), Q)_\alpha = (P, \mathcal{A}_\alpha(Q))_\alpha$

7) Soit λ une valeur propre de $\mathcal{A}_\alpha$ et P un vecteur propre associé à λ.
a) Montrer que P vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(1-x^2)y'' - 2(\alpha+1)xy' + \lambda y = 0$$

b) Montrer que, pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}$,

$$\lambda_n^\alpha = n(n-1) + 2(\alpha+1)n$$

est une valeur propre de $\mathcal{A}_\alpha$.

8) On prend $\alpha = 0$. Vérifier que, pour tout $n \in \{0, 1, ..., N\}$, $\mathcal{A}_0(J_n^0) = \lambda_n^0 J_n^0$.

Problème

Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel formé par les matrices à coefficients réels, à n lignes et m colonnes et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Partie 1

1) a) Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec ${}^tVU \neq 0$.
Prouver que $A = U\,{}^tV$ est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1 et de trace non nulle.
i) Montrer qu'il existe $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $U \neq 0$ tel que:
pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe un réel α_X vérifiant $AX = \alpha_X U$.
ii) On note A_i la i^{eme} colonne de la matrice A et $(E_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ la famille d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$E_i = (e_{j,1})_{1\leq j\leq n} \text{ avec } e_{i,1} = 1 \text{ et } e_{j,1} = 0 \text{ si } j \neq i$$

X

Vérifier que $A_i = AE_i$.
En déduire qu'il existe $\alpha_i \in \mathbb{R}$ tel que $A_i = \alpha_i U$.
iii) On note $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $U\,{}^tV = A$ et que ${}^tVU \neq 0$.
c) En déduire qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace non nulle est de rang 1, si et seulement s'il existe deux vecteurs U et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que ${}^tVU \neq 0$ et $A = U\,{}^tV$.

2) Soient $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que ${}^tVU \neq 0$.

On note $A = U\,{}^tV \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $L = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tVX = 0\}$ et

$$\Psi : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \mapsto {}^tVX$$

a) Démontrer que Ψ est linéaire.
b) En déduire que L est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.
c) Montrer que $U \notin L$ et que $AX = 0$, $\forall X \in L$.
d) Prouver que U est un vecteur propre de A.
e) Montrer que A est semblable à la matrice D définie par :

$$D = \begin{pmatrix} {}^tVU & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

f) Soit I la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I + A) = 1 + {}^tVU$.
g) Expliciter l'inverse (quand il existe) de $I + A$ sous la forme $I + \alpha A$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Partie 2

Dans cette partie, on désigne par :
$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tA = A\}$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}^+ = \{A \in \mathcal{S}$ tel que ${}^tXAX \geq 0$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\}$, le sous espace de $\mathcal{S}$ formé par les matrices symétriques positives.
$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tA = -A\}$, l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{O}(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAA = I\}$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Question préliminaire Montrer que l'ensemble S est égal à

$$\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } {}^tXAY = {}^tYAX\ ,\ \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ tels que } {}^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0.\}$$

A)
1) On définit l'application :

$$\langle , \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\,(A\,{}^tB)$$

Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
2) a) Soit A une matrice symétrique positive ($A \in \mathcal{S}^+$).
Montrer que $\|A\|^2 \leq (\operatorname{tr}(A))^2$.
b) Vérifier que, pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

c) En déduire que, pour tout A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$$

3) Montrer que, pour tout U et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\|U\,{}^tV\| = \sqrt{{}^tUU}\sqrt{{}^tVV}.$$

4) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que , A est une matrice symétrique et B est une matrice antisymétrique. Montrer que $\langle A, B\rangle = 0$.

B)

Soient X et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que :

$$^tXX = {}^tYY = 1 \text{ et } {}^tXY = 0.$$

On pose pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$Q(\alpha) = I - 2\sin^2\alpha(X\,{}^tX + Y\,{}^tY) + 2\sin\alpha\cos\alpha(X\,{}^tY - Y\,{}^tX)$$

et

$$P = I - 2X\,{}^tX.$$

1) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q(\alpha)Q(-\alpha) = I$.
2) Vérifier que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $Q(\alpha) \in \mathcal{O}(n)$ et $P \in \mathcal{O}(n)$.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant :

$$\langle A, \Omega\rangle \leq \langle A, I\rangle \text{ pour tout } \Omega \in \mathcal{O}(n).$$

a) Prouver que pour tout W et $Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle A, W\,{}^tZ\rangle = {}^tWAZ.$$

b) Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$-2\sin^2\alpha({}^tXAX + {}^tYAY) + 2\sin\alpha\cos\alpha({}^tXAY - {}^tYAX) \leq 0.$$

c) En déduire que $A \in \mathcal{S}$.
d) Montrer que $\langle A, P - I\rangle \leq 0$, et en déduire que $A \in \mathcal{S}^+$.

4) On suppose que $A \in \mathcal{S}^+$ et $\Omega \in \mathcal{O}(n)$.

a) Montrer que :

$$\Omega + {}^t\Omega - 2I = -\,{}^t(\Omega - I)(\Omega - I).$$

b) Définissons C par :

$$2C = \Omega + {}^t\Omega - 2I.$$

Montrer que $\langle A, \Omega - I\rangle = \langle A, C\rangle$. En déduire que

$$2\langle A, \Omega - I\rangle = -\operatorname{tr}\left((\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I)\right)$$

c) Montrer que $(\Omega - I)A\,{}^t(\Omega - I) \in \mathcal{S}^+$.
d) En déduire que :

$$\langle A, \Omega\rangle \leq \langle A, I\rangle$$

5) Montrer que :

$$\mathcal{S}^+ = \bigcap_{\Omega \in \mathcal{O}(n)} \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \langle A, \Omega\rangle \leq \langle A, I\rangle\}$$

6) Soient $\Omega \in \mathcal{O}(n)$ et

$$\Psi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$A \mapsto \langle A, \Omega - I\rangle$$

a) Montrer que Ψ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que, pour tout $\Omega \in \mathcal{O}(n)$, $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \langle A, \Omega\rangle \leq \langle A, I\rangle\}$ est un fermé.
c) En déduire que $\mathcal{S}^+$ est un fermé.
d) $\mathcal{S}^+$ est-il un compact?